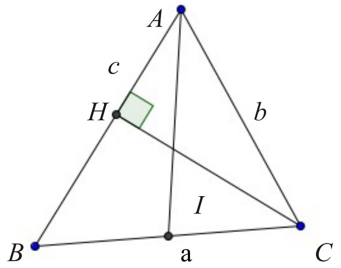
APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1) RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE

A) NOTATIONS USELLES



Soit ABC un triangle quelconque. L'usage est de noter :

- $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$
- S l'aire du triangle
- $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$, $\widehat{C} = \widehat{ACB}$

B) LE THEORÈME D'AL KASHI

Théorème :

On a : $$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, bc \cos \widehat{A}$$

Ce théorème est aussi appelé théorème de Pythagore généralisé …

Preuve :

On a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Ainsi $a^2 = \left(\overrightarrow{BC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AC^2 + AB^2 - 2\, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = b^2 + c^2 - 2\, bc \cos \widehat{A}$

Remarques :

- De la même façon, on montre que : $b^2 = a^2 + c^2 - 2\, ac \cos \widehat{B}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos \widehat{C}$
- Si le triangle est rectangle en A , alors $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{2}$, $\cos \widehat{A} = 0$ et … $a^2 = b^2 + c^2$ *(On retrouve le théorème de Pythagore)*

C) LE THEORÈME DE LA MEDIANE

Théorème :

Soit I le milieu de $[BC]$. On a : $$AB^2 + AC^2 = 2\, AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

On a aussi : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - \dfrac{1}{4} BC^2$ et $AB^2 - AC^2 = 2\, \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BC}$

Preuve :

On a $AB^2 = \left(\overrightarrow{AB}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = AI^2 + IB^2 + 2\, \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB}$

Et $AC^2 = \left(\overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}\right)^2 = AI^2 + IB^2 - 2\, \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB}$

En additionnant membres à membres on obtient :

$AB^2 + AC^2 = 2\, AI^2 + 2\, IB^2 = 2\, AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$

D) AIRE D'UN TRIANGLE

Propriété :

On a : $$S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$$

Preuve :

L'aire du triangle ABC est donnée par $S = \dfrac{1}{2} AB \times CH$

Deux cas se présentent :

- si l'angle $\widehat{A}$ est aigu, $CH = AC \sin \widehat{A}$
- si l'angle $\widehat{A}$ est obtus, $CH = AC \sin \widehat{CAH}$

Or $\widehat{CAH} = \pi - \widehat{A}$, donc $\sin \widehat{CAH} = \sin\left(\pi - \widehat{A}\right) = \sin \widehat{A}$

Dans les deux cas, on $S = \dfrac{1}{2} AB \times AC \sin \widehat{A} = \dfrac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$

Remarque :

De la même façon, on montre que $S = \dfrac{1}{2} ac \sin \widehat{B}$ et $S = \dfrac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$

E) FORMULE DES SINUS

Propriété :

On a : $$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

Preuve :

On a $S = \dfrac{1}{2} bc \sin \widehat{A} = \dfrac{1}{2} ac \sin \widehat{B} = \dfrac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$

En multipliant par $\dfrac{2}{abc}$, on obtient $\dfrac{2\,S}{abc} = \dfrac{\sin \widehat{A}}{a} = \dfrac{\sin \widehat{B}}{b} = \dfrac{\sin \widehat{C}}{c}$

En passant aux inverses (les sinus des angles d'un triangle sont différents de zéro) , on obtient $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}}$

2) DROITE

A) CARACTÉRISATION D'UNE DROITE

Définition :

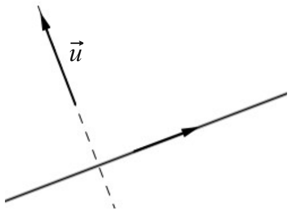
Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d.

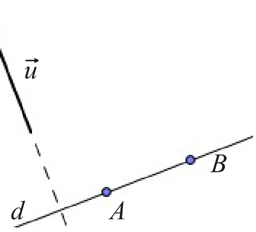
Propriété :

Soit d une droite, A un point de d et un $\vec{u}$ vecteur normal à d.

La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$.
C'est à dire

$$M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$$





La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux ...

Remarque : Pour montrer que deux droites sont perpendiculaires on peut utiliser le produit scalaire et les vecteurs directeurs .

B) APPLICATION : ÉQUATION D'UNE DROITE DONT ON CONNAIT UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

Propriété :

Soit $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ un repère orthonormal et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

- Si le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à une droite d , alors d a une équation de la forme $ax+by+c=0$ (où c est un réel)
- Réciproquement, toute droite ayant une équation de la forme $ax+by+c=0$ (avec $(a\,;b)\neq(0\,;0)$) admet le vecteur $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Preuve :

- Soit $A(x_0\,;y_0)$ un point de d et $M(x\,;y)$ un point du plan , alors :

$M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$

On a $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$

Ainsi $M\in d \Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$
$\Leftrightarrow ax+by-(ax_0+by_0)=0$
$\Leftrightarrow ax+by+c=0$, en posant $c=-(ax_0+by_0)$

- Si la droite d a pour équation $ax+by+c=0$, alors le vecteur $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d . (facile à montrer)

  Or $\vec{u}\cdot\vec{v}=a(-b)+b\,a=0$
  Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et $\vec{u}$ est normal à d .

3) CERCLE

A) CARACTÉRISATION D'UN CERCLE DE CENTRE ET DE RAYON DONNÉS

Propriété :

Soit A un point du plan et r un réel positif.
Le cercle C de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}^2=r^2$

Preuve :
Soit M un point du plan .
$M\in C \Leftrightarrow AM=r \Leftrightarrow AM^2=r^2\ldots$

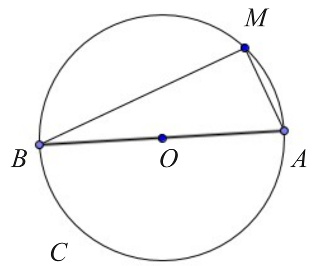
APPLICATION : ÉQUATION D'UN CERCLE DE CENTRE ET DE RAYON DONNÉS

On se place dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.
Soit $A(x_0\,;y_0)$, un réel positif r et C le cercle de centre A et de rayon r.

Pour tout point $M(x\,;y)$ du plan,
On a alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$

Le cercle C est donc l'ensemble des points $M(x\,;y)$du plan tels que $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

B) CARACTÉRISATION D'UN CERCLE DE DIAMÈTRE DONNÉ



Propriété :

Soit A et B deux points distincts du plan.

La cercle C de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

Preuve :

Comme vous le savez depuis longtemps, le cercle C , privé des points A et B , est l'ensemble des points M du plan tels que le triangle MAB est rectangle en M , c'est à dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.
D'autre part, si $M=A$ ou $M=B$, alors $\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ ou $\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ et on a encore $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

APPLICATION : ÉQUATION D'UN CERCLE DE DIAMÈTRE DONNÉ

Étude d'un exemple :

On se place dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.
Déterminons une équation du cercle C de diamètre $[AB]$ avec $A(-1\,;3)$ et $B(2\,;2)$.
Soit $M\,(x\,;\,y)$ un point du plan .
On a $M\in C \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$
Or $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-1-x\\3-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}2-x\\2-y\end{pmatrix}$

Ainsi $M\in C \Leftrightarrow (-1-x)(2-x)+(3-y)(2-y)=0 \Leftrightarrow x^2-x+y^2-5y+4=0$

Remarque :
En développant $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ (trouvé en A) on obtient une équation de la forme $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ (où a , b et c sont des réels) , mais réciproquement une équation de cette forme ne représente pas toujours un cercle .

Exemple :

$$\begin{aligned} & x^2+y^2-x-3y+3=0\\ \Leftrightarrow\ & (x^2-x)+(y^2-3y)+3=0\\ \Leftrightarrow\ & \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+3=0\\ \Leftrightarrow\ & \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ce qui est impossible ; l'ensemble des points vérifiant cette relation est donc l'ensemble vide.

4) TRIGONOMÉTRIE

A) FORMULES D'ADDITION

Propriétés :

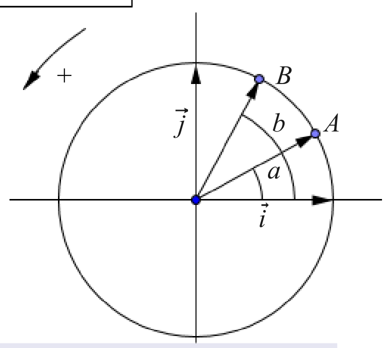
$\forall\, a\in\mathbb{R}$ et $\forall\, b\in\mathbb{R}$, on a :

$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$; $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$; $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

Preuve :

- $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$



On considère le cercle trigonométrique C de centre O muni du repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
On note A et B les points de C , définis par $(\vec{i}\,,\overrightarrow{OA})=a$ et $(\vec{i}\,,\overrightarrow{OB})=b$.
Les coordonnées de A et de B sont respectivement $(\cos a\,;\sin a)$ et $(\cos b\,;\sin b)$.

D'autre part, d'après la relation de Chasles, on a :
$(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA}\,,\vec{i})+(\vec{i}\,,\overrightarrow{OB})=-(\vec{i}\,,\overrightarrow{OA})+(\vec{i}\,,\overrightarrow{OB})=b-a$

Calculons alors de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$:

- *avec les coordonnées* : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
- *en utilisant* $\cos(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB})$: $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OB\cos(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB})=1\times1\times\cos(b-a)=\cos(a-b)$

Ainsi $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

- $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

Il suffit d'écrire $\cos(a+b)=\cos(a-(-b))\ \ldots$

- $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

Il suffit d'écrire $\sin(a+b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right)=\ldots$

- $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

Il suffit d'écrire $\sin(a-b)=\sin(a+(-b))=\ \ldots$

Exemple :

En remarquant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, on peut calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

- $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
- $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

B) FORMULES DE DUPLICATION ET DE LINÉARISATION

Propriétés :

FORMULES DE DUPLICATION	*FORMULES DE LINEARISATION*
$\forall a\in\mathbb{R}$, on a : • $\sin 2a=2\sin a\cos a$ • $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ $\quad=2\cos^2 a-1$ $\quad=1-2\sin^2 a$	• $\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}$ • $\sin^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}$

Preuve :

En prenant $b=a$, dans les formules précédentes on obtient $\sin 2a=2\sin a\cos a$ et $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$.

En utilisant la relation $\cos^2 a+\sin^2 a=1$, on obtient $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ et $\cos 2a=1-2\sin^2 a$

On en déduit les deux dernières formules.